Εισαγωγή στην Τοπολογία, 19/9/2022, Α. Τόλιας

Θέμα 1. (2 μον.)
Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος, A ένα υποσύνολο του X και $x \in X$. Να δειχθούν τα εξής:

α) Αν $x \in \overline{A}$ τότε υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του A ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

β) Αν υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του A ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $x \in \overline{A}$.

Θέμα 2. (2,5 μον.)
α) Δίνεται ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος X. Πότε μια συνάρτηση $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ καλείται νόρμα; Αν $\| \ \|$ είναι μια νόρμα στο X να ορίσετε τη μετρική που ορίζει αυτή η νόρμα και να αποδείξετε ότι είναι πράγματι μια μετρική στο X.

β) Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ να αναφέρετε τους ορισμούς των νορμών $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$ (μόνο να αναφέρετε τον τύπο καθεμιάς από αυτές, χωρίς να αποδείξετε ότι είναι πράγματι νόρμες).

Στη συνέχεια, συμβολίζοντας με ρ_1, ρ_2 και ρ_∞ αντίστοιχα τις μετρικές που ορίζουν οι τρεις αυτές νόρμες να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την κλειστή μπάλα κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 2 ως προς καθεμιά από αυτές τις μετρικές, δηλαδή με άλλα λόγια να βρείτε και να σχεδιάσετε τα σύνολα $\widehat{B}_{\rho_1}((0,0),2)$, $\widehat{B}_{\rho_2}((0,0),2)$ και $\widehat{B}_{\rho_\infty}((0,0),2)$. Να κάνετε τρία ξεχωριστά σχήματα.

Θέμα 3. (2 μον.)
(α) Πότε ένας μετρικός χώρος (X,ρ) καλείται μη συνεκτικός και πότε συνεκτικός; Πότε ένα υποσύνολο $A \subseteq X$ λέγεται συνεκτικό;
(β) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε το A να μην είναι διάστημα. Δείξτε ότι το A δεν είναι συνεκτικό.
(γ) Να δείξετε ότι ένας μετρικός χώρος (X,ρ) είναι μη συνεκτικός αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $f : X \to \{0,1\}$ συνεχής και επί.

Θέμα 4. (2 μον.)
Α. Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και K ένα υποσύνολο του X.
α) Να δείξετε ότι αν το K είναι συμπαγές τότε το K είναι κλειστό.
β) Να δείξετε ότι αν το K είναι συμπαγές τότε το K είναι φραγμένο.
Β. Σε κατάλληλο μετρικό χώρο (X,ρ) που θα επιλέξετε εσείς να δοθεί παράδειγμα ενός κλειστού και φραγμένου υποσυνόλου K του X που να είναι κλειστό και φραγμένο αλλά να μην είναι συμπαγές.

Θέμα 5. (2 μον.)
α) Να δείξετε ότι κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη
β) Έστω (X,ρ) και (Y,d) δυο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια βασική ακολουθία στον (X,ρ) τότε η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (Y,d).

Καλή Επιτυχία!